

Systemes dynamiques

Claude Gomez

Claude.Gomez@inria.fr

INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau BP 105
78153 Le Chesnay Cedex

Février 2007

Chapitre 1

Introduction

Un système dynamique est un système qui évolue avec le temps : t . Nous donnons ci-après quelques exemples.

1.1 Évolution d'une quantité proportionnelle à elle-même

Argent sur un compte rémunéré

$y(t)$ est la somme d'argent sur le compte pour le jour t , α est le taux d'intérêt sur 1 jour. Au bout d'une journée, on a donc sur le compte :

$$y(t + 1) = y(t) + \alpha y(t) = (1 + \alpha) y(t)$$

et ainsi de suite :

$$y(t + 2) = (1 + \alpha)^2 y(t)$$

⋮

$$y(t + h) = (1 + \alpha)^h y(t)$$

Comme α est « malheureusement » petit, au bout de h jours on peut considérer que l'on dispose d'une somme de :

$$y(t + h) \simeq y(t) + h \alpha y(t)$$

ce qui est une équation d'évolution discrète du système. Sur une longue période de plusieurs années, h est petit devant le temps écoulé et l'équation peut s'écrire sous forme continue :

$$y'(t) = \alpha y(t)$$

où $y'(t)$ désigne la dérivée par rapport au temps.

Dynamique des populations

$y(t)$ est le nombre moyen d'individus d'une grande population, la population mondiale par exemple à l'instant t (en secondes). Pour une petite période de temps h (quelques secondes), le *taux de variation* de la population en nombre d'individus par seconde peut être considéré comme constant et égal à :

$$\frac{y(t + h) - y(t)}{h} \simeq y'(t)$$

On définit de même le *taux de naissance* et le *taux de décès* de la population en nombre d'individus par seconde. On peut considérer ces taux proportionnels à la taille de la population et définir ainsi :

- le *taux de fertilité* β qui est le nombre de naissances par individu et par seconde ;
 - le *taux de mortalité* γ qui est le nombre de décès par individu et par seconde.
- La population moyenne vérifie alors l'équation suivante :

$$y'(t) = \beta y(t) - \gamma y(t) = \alpha y(t).$$

Masse d'une substance radioactive qui se décompose avec un taux α par unité de masse

Cette masse suit encore le même type d'équation :

$$y'(t) = \alpha y(t)$$

où α est ici négatif.

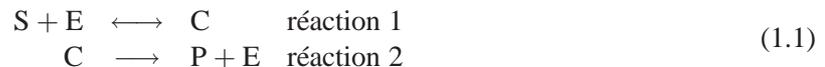
Tous ces systèmes dynamiques suivent la même équation différentielle linéaire dont la solution est :

$$y(t) = y(t_0) \exp(\alpha(t - t_0))$$

où $y(t_0)$ est l'état initial à l'instant initial t_0 .

1.2 Cinétique chimique

On prend l'exemple d'une réaction enzymatique. On a un substrat S qui se combine avec une molécule d'un enzyme E pour former un composé C. C se décompose ensuite en un produit de réaction P et une molécule E. On a le schéma :



où \longleftrightarrow signifie que la réaction peut se produire dans les deux sens.

On appelle $s(t)$, $e(t)$, $c(t)$ et $p(t)$ les concentrations en moles par litre des composants. On appelle r_1 le taux de réaction de la réaction 1 dans le sens direct et r_{-1} le taux de réaction de la réaction 1 dans le sens rétrograde. On appelle r_2 le taux de réaction de la réaction 2.

Le nombre de fois où une réaction donnée se produit par unité de temps est toujours considéré proportionnel aux concentrations des espèces qui réagissent. Le système (1.1) peut donc se traduire par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} s'(t) = -r_1 e(t)s(t) + r_{-1} c(t) \\ e'(t) = -r_1 e(t)s(t) + r_{-1} c(t) + r_2 c(t) \\ c'(t) = r_1 e(t)s(t) - r_{-1} c(t) - r_2 c(t) \\ p'(t) = r_2 c(t) \end{cases}$$

En effet, par exemple, le taux de variation de la concentration en enzyme E, soit $e'(t)$ comporte trois termes : $-r_1 e(t)s(t)$ qui correspond à la disparition de molécules E dans la première réaction, $r_{-1} c(t)$ qui correspond à la production de molécules E par l'inverse de la première réaction et $r_2 c(t)$ qui correspond à la production de molécules E dans la deuxième réaction.

On peut vérifier que selon le principe de conservation de la masse, l'enzyme doit être présent sous sa propre forme E ou dans le composé C : $e(t) + c(t) = \text{constante}$, ce qui est bien le cas car $e'(t) + c'(t) = 0$.

En fait, tout système d'équations de cinétique chimique se traduit automatiquement en un système d'équations différentielles non linéaires qui comporte autant d'équations que d'espèces chimiques. Noter qu'ici on ne sait pas intégrer le système précédent.

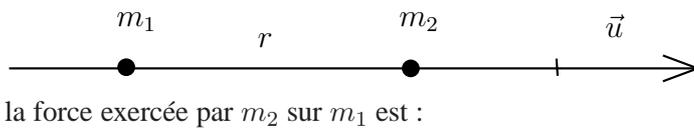
1.3 Mécanique classique

En fait la première apparition explicite d'équations différentielles eut lieu en 1687 avec le livre de Sir Isaac Newton, « Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica », où étaient énoncées les deux lois fondamentales de la mécanique classique :

- un corps sujet à une force a une accélération qui a la même direction que la force, qui est proportionnelle à la force et qui est inversement proportionnelle à la masse du corps, soit :

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

- deux corps s'attirent avec une force alignée le long d'une droite passant par ces deux corps, proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de leurs distances (loi universelle de la gravitation) :



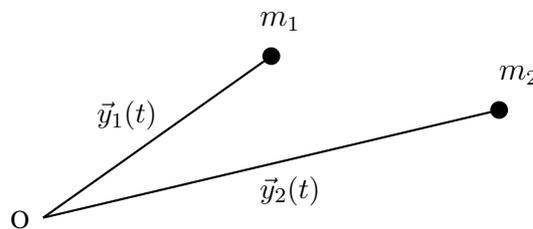
$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

où G est la constante de la gravitation universelle.

Ces deux lois combinées donnent un système d'équations différentielles pour les positions des corps.

Problèmes des deux corps

On peut appliquer les lois de Newton à un système formé de deux corps isolés dans le vide.



On obtient le système non linéaire de 6 équations d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} m_1 \vec{y}_1''(t) = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)\|^2} \frac{\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)}{\|\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)\|} \\ m_2 \vec{y}_2''(t) = G \frac{m_2 m_1}{\|\vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t)\|^2} \frac{\vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t)}{\|\vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t)\|} \end{cases}$$

En fait, on peut se ramener à un système de deux équations du premier ordre que l'on résout dans le plan des deux corps : on obtient ainsi des orbites elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. Cela demande pas mal de travail (voir par exemple le livre de J. Hubbard et B. West, paragraphe 6.6, cité dans la bibliographie) et Newton l'a réalisé pour démontrer les 3 lois de Kepler. Ce dernier les avait énoncées au début du XVI^e siècle après 14 ans d'observation dans l'observatoire de Tycho Brahé.

Problèmes des n corps

Dès que l'on a plus de deux corps, on obtient un système de $3n$ équations du deuxième ordre que l'on ne sait pas intégrer.

Nous avons ainsi vu un certain nombre d'exemples de systèmes dynamiques qui se ramènent à la résolution de systèmes d'équations différentielles. Ce n'est bien sûr pas la seule façon de modéliser des systèmes dynamiques ; on peut aussi utiliser par exemple des systèmes itératifs discrets, des équations récurrentes. . .

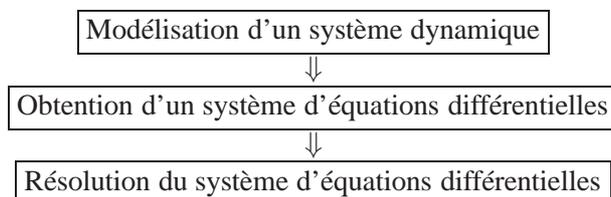
Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons aux systèmes dynamiques modélisés par des systèmes d'équations différentielles.

Chapitre 2

Équations différentielles

2.1 Introduction

L'étude d'un système dynamique, dans le cadre de ce cours, suit le schéma suivant :



Il est à noter que la partie « modélisation » est souvent l'étape la plus difficile.

On cherche en fait :

- L'existence de solutions : quand et où y-a-t'il des solutions ? A-t'on unicité ?
- Comment se comportent les solutions à partir d'un point de départ, autour d'un point, à l'infini ?
Quelle est la sensibilité de la solution par rapport aux conditions initiales ?

Pour cela on réalise la résolution du système d'équations différentielles. Quels sont les outils à notre disposition ?

Résolution explicite ou analytique

C'est semble-t'il l'idéal. A priori oui, mais en fait :

- Peu d'équations différentielles peuvent être résolues analytiquement. Par exemple, on se sait pas intégrer une équation aussi simple que $y' = y^2 - t$ que ce soit sous la forme de fonctions élémentaires ou d'intégrales de fonctions élémentaires. On rappelle qu'une fonction élémentaire est une fonction obtenue à partir des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{Q} par application répétée de l'exponentielle, du logarithme, des opérations $+$, \times , $-$, \div et de l'opération de clôture algébrique. On ne sait pas résoudre non plus $y' = \sin(ty)$ ou $y' = \exp(ty)$.
- Il faut utiliser un système de calcul formel pour résoudre analytiquement une équation différentielle. Mais souvent cette résolution intervient dans le cadre d'une étude d'un problème de nature numérique et on ne peut pas en général rester dans le système de calcul formel pour réaliser les calculs numériques, c'est trop peu efficace. Il faut alors utiliser des liens entre calcul formel et calcul numérique.
- Parfois, on peut avoir l'expression analytique de la solution, mais le calcul reste tout de même numérique. Par exemple, si l'on veut résoudre le système d'équations différentielles linéaires

$y' = Ay$ où A est une matrice carrée $n \times n$, la solution est

$$y(t) = \exp((t - t_0)A)y(t_0)$$

Mais le calcul pour différentes valeurs de t redevient numérique : calcul de l'exponentielle de matrice. C'est aussi le cas par exemple pour le calcul des fonctions de Bessel.

Étude qualitative

L'étude qualitative permet de voir le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle. En particulier elle permet l'étude locale des solutions autour de points particuliers.

Résolution numérique

La résolution numérique permet de résoudre de grandes classes de systèmes d'équations différentielles.

On sait en général résoudre numériquement les systèmes d'équations différentielles explicites du premier ordre avec condition initiale (problème de Cauchy) et quelques systèmes d'équations différentielles implicites avec condition initiale appelés systèmes algébro-différentiels.

Le problème qui se pose alors est celui de la précision numérique, du choix et de la convergence des méthodes, en particulier pour les problèmes dits raides. Heureusement il existe des programmes numériques, appelés « solveurs » qui permettent de résoudre ces problèmes.

Nous utiliserons dans le cadre de ce cours, pour résoudre les systèmes dynamiques modélisés par des systèmes d'équations différentielles, des méthodes numériques appuyées par des études qualitatives. Pour cela nous utiliserons les solveurs du système de calcul scientifique Scilab (voir le chapitre 4).

2.2 Classification

Le système d'équations différentielles le plus général est le système de n équations différentielles d'ordre p :

$$f(t, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0 \quad f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

où U est un ouvert et $y(t)$ est la fonction inconnue de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n où I est un intervalle.

En introduisant les fonctions supplémentaires :

$$Y_1 = y', \quad Y_2 = y'', \dots, Y_{p-1} = y^{(p-1)}$$

on peut toujours se ramener au système de np équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1}, Y'_{p-1}) = 0 \\ y' = Y_1 \\ Y'_1 = Y_2 \\ \vdots \\ Y'_{p-2} = Y_{p-1} \end{array} \right.$$

De plus, on peut aussi toujours faire disparaître la dépendance explicite du système par rapport au temps en introduisant la fonction supplémentaire $Z = t$ et en rajoutant l'équation $Z' = 1$. On obtient alors un système dit *autonome* de $np + 1$ équations différentielles du premier ordre.

Dans toute la suite, nous ne traiterons donc que des systèmes d'équations différentielles du premier ordre autonomes ou non :

$$f(t, y, y') = 0$$

Noter qu'un tel système est dit explicite lorsqu'il peut se mettre sous la forme :

$$y' = f(t, y)$$

C'est bien sûr le cas le plus favorable. En général, il n'est pas toujours possible de rendre un système explicite.

2.3 Problème de Cauchy

On étudie le problème aux conditions initiales explicite dit *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

où f est une application, U est un ouvert et $(t_0, y_0) \in U$.

Par définition, une *solution du problème de Cauchy* est un couple (I, y) vérifiant :

$$\begin{cases} I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \text{ contenant } t_0 \\ y \text{ dérivable : } I \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Une *solution maximale* du problème de Cauchy est une solution définie sur un intervalle I qu'on ne peut pas prolonger en une solution définie sur un intervalle J contenant strictement I .

Définition 2.3.1 L'application f de l'ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n est Lipschitzienne par rapport à y sur U si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \quad \forall (t, y_1) \in U, \quad \forall (t, y_2) \in U, \quad \|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq K \|y_2 - y_1\|$$

K est appelé la constante de Lipschitz. Noter qu'elle ne dépend ni de y_1 , ni de y_2 .

Définition 2.3.2 L'application f de l'ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n est localement Lipschitzienne par rapport à y sur U si $\forall (t, y) \in U$, on peut trouver un voisinage ouvert connexe de (t, y) dans U dans lequel f est Lipschitzienne.

Ici la constante de Lipschitz K dépend de y .

Bien sûr, si f est Lipschitzienne, elle est aussi localement Lipschitzienne.

Un résultat très important est que si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors elle est localement Lipschitzienne. En particulier, en dimension 1, la constante K est égale à :

$$\sup_{(t,y) \in U} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

Le théorème fondamental suivant est un résultat de Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (milieu du XIX^e) siècle qui a simplifié le travail d'Augustin-Louis Cauchy (début du XIX^e).

Théorème 2.3.1 (Cauchy-Lipschitz) Pour le problème de Cauchy, si f est continue sur U et localement Lipschitzienne par rapport à y , alors il y a existence et unicité d'une solution maximale.

En particulier, le théorème est vrai si f est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à y et continue par rapport à t .

En fait la constante K de Lipschitz borne la vitesse à laquelle les solutions « s'écartent » :

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| = \|y_2'(t) - y_1'(t)\| \leq K \|y_2 - y_1\|$$

La condition de Lipschitz dans le théorème de Cauchy-Lipschitz est souvent d'utilisation pratique dans des cas non rares où la fonction f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 . Par exemple, dans l'équation différentielle en dimension 1, $y' = -|y|$, où la fonction f n'est pas dérivable en 0 mais est bien Lipschitzienne, le problème de Cauchy a une solution et une seule quel que soit le point initial.

Les *courbes intégrales* du problème de Cauchy (2.1) sont les images des arcs paramétrés $t \in I \longrightarrow (t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: ce sont les courbes représentatives des solutions de l'équation (représentées dans l'espace \mathbb{R}^{n+1}).

Si le théorème de Cauchy-Lipschitz est vérifié, alors les courbes intégrales ne se coupent pas.

Pour le problème de Cauchy (2.1), on peut aussi tracer les *trajectoires* dans le *plan de phase* de dimension \mathbb{R}^n : ce sont les courbes $y(I)$ pour y solution de (2.1). Dans le cas des systèmes autonomes, les trajectoires s'appellent aussi des *orbites*.

Si le théorème de Cauchy-Lipschitz est vérifié, alors pour un système autonome les trajectoires ne se coupent pas dans le plan de phase.

Noter que si le système (2.1) est autonome, c'est-à-dire si l'on a $y' = f(y)$, et si $(I = (t_1, t_2), y)$ est solution, alors, pour tout T , la translatée $y(t - T)$ est aussi solution sur l'intervalle $(t_1 + T, t_2 + T)$. On passe d'une courbe intégrale à une autre par translation en temps.

2.4 Systèmes d'équations différentielles linéaires

On considère le système d'équations différentielles à coefficients constants :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où A est une matrice carrée constante à valeurs dans \mathbb{R}^n , c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Selon le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour toute condition initiale, il existe une solution unique au problème précédent.

Le système est autonome ; on pourra donc, sans perte de généralité, prendre $t_0 = 0$.

En dimension 1 la solution d'un tel système, où A est un scalaire, est : $y(t) = y_0 \exp(At)$. En dimension n quelconque, on va trouver l'analogie.

On définit pour toute matrice A la série : $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$; on peut montrer que pour toute matrice A , cette série converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on appelle exponentielle de la matrice A et on note $\exp(A)$ sa somme.

On rappelle ci-après les propriétés importantes de l'exponentielle de matrice :

$$\left| \begin{array}{l} \exp(A_1 + A_2) = \exp(A_1) \exp(A_2) \quad \text{si } A_1 \text{ et } A_2 \text{ commutent} \\ \exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1} \\ \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \exp(tA) = \exp(tA)A \end{array} \right.$$

La solution du système d'équations différentielles linéaires du premier ordre (2.2) (où $t_0 = 0$) est donc :

$$y(t) = \exp(tA)y_0.$$

2.4.1 Quelques propriétés des solutions

Les solutions précédentes du système linéaire ont des propriétés bien particulières, en particulier celles décrites ci-après seront utiles.

Principe de superposition : si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont solutions de (2.2), alors toute combinaison linéaire $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ est aussi solution.

Évolution dans la direction d'un vecteur propre : si v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et si $y(0) = \alpha v$ est une condition initiale, alors la solution est $y(t) = \alpha \exp(\lambda t)v$.

En particulier, si les vecteurs propres v_1, \dots, v_p forment une base de \mathbb{R}^n et si λ_i est la valeur propre associée à v_i , la condition initiale $y(0) = y_0$ peut s'écrire $\sum_{i=1}^n a_i v_i$ et la solution est $y(t) = \sum_{i=1}^n a_i \exp(\lambda_i t)v_i$.

2.4.2 Réduction des matrices

Nous allons maintenant voir comment sont constitués les éléments de $\exp(tA)$. Pour cela on va réduire la matrice A , c'est-à-dire trouver une matrice B « plus simple » que A telle que $A = PBP^{-1}$ où P est une matrice inversible (changement de base).

On appelle $\chi(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A , où λ_i est la i^e valeur propre de multiplicité ω_i . $\text{SEP}(\lambda_i)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i (c'est-à-dire $\ker(A - \lambda_i I)$).

Il y a plusieurs types de matrices B que l'on peut obtenir, en particulier :

- B diagonale : c'est le cas le plus favorable. A est ainsi diagonalisable, ce qui est le cas si et seulement si $\chi(\lambda)$ est scindé et $\dim \text{SEP}(\lambda_i) = \omega_i$.
- B triangulaire (supérieure). A est ainsi trigonalisable, ce qui est le cas si et seulement si $\chi(\lambda)$ est scindé.
- $B = D + N$ où D est diagonale et N nilpotente. Cette décomposition s'appelle parfois *décomposition de Dunford*. B admet une telle décomposition si et seulement si $\chi(\lambda)$ est scindé. En particulier la matrice B peut s'écrire sous la forme diagonale par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\omega_1} + T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{\omega_p} + T_p \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

où T_k est nilpotente d'indice $\leq \omega_k$.

2.4.3 Comportement asymptotique de $\exp(tA)$

Nous revenons maintenant aux éléments de la matrice $\exp(tA)$. Pour cela on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on utilise la décomposition de Dunford précédente. Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$ où B est de la forme (2.3). Le calcul donne alors :

$$\exp(tA) = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t I_{\omega_1} + t T_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_p t I_{\omega_p} + t T_p) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Pour chaque k , $\exp(\lambda_k t I_{\omega_k} + t T_k) = \exp(\lambda_k t) \exp(t T_k)$. Mais T_k est nilpotente d'indice $i_k \leq \omega_k$ et donc $\exp(t T_k) = \sum_{l \geq 0} \frac{(t T_k)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{i_k-1} t^l \frac{T_k^l}{l!}$ qui est une somme finie de puissances de t .

En conclusion, les coefficients de $\exp(tA)$ sont donc des combinaisons linéaires de termes de la forme $t^l \exp(\lambda_k t)$. En particulier, si $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, on a $t^l \exp(\lambda_k t) = t^l \exp(\alpha_k t) (\cos(\beta_k t) + i \sin(\beta_k t))$.

Cela va permettre de déterminer le comportement asymptotique (lorsque $t \rightarrow \infty$) des systèmes d'équations différentielles linéaires afin d'isoler certains types de comportements. En pratique, on va utiliser :

- si $\Re(\lambda_k) > 0$, alors $|t^l \exp(\lambda_k t)| \rightarrow +\infty$;
- si $\Re(\lambda_k) < 0$, alors $|t^l \exp(\lambda_k t)| \rightarrow 0$;
- si $\Re(\lambda_k) = 0$ et si $l = 0$, on aura un comportement périodique.

2.4.4 Cas de la dimension 2

L'étude de la dimension 2 va nous permettre de définir les cas et le vocabulaire utilisés pour la dimension quelconque ainsi que pour les systèmes d'équations différentielles non linéaires.

Le système différentiel (2.2) devient :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels.

Le point $(0,0)$ est solution et point d'équilibre du système (voir 2.5.1). On va voir comment se comportent les trajectoires autour de ce point dans le plan de phase selon les valeurs des deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice du système.

λ_1 et λ_2 réelles, non nulles et distinctes

Les vecteurs propres forment une base de \mathbb{R}^2 et la solution s'écrit (voir 2.4.1) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + a_2 \exp(\lambda_2 t) v_2$$

On a donc les trois cas suivants :

- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: le point $(0,0)$ est une source (voir la figure 2.1(a)) ;
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: le point $(0,0)$ est un point selle (voir la figure 2.1(b)) ;
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: le point $(0,0)$ est un puits (voir la figure 2.1(c)).

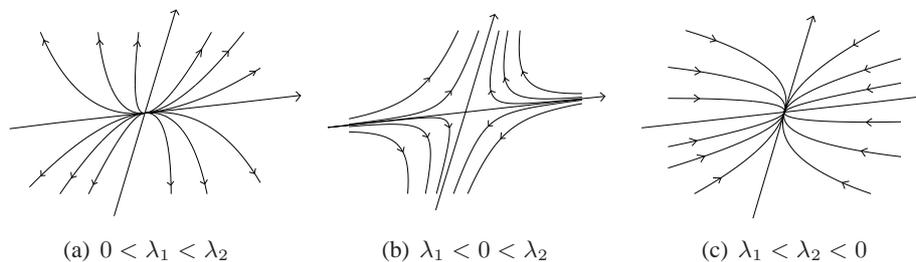


FIG. 2.1 – Valeurs propres réelles, non nulles et distinctes

λ_1 et λ_2 complexes

λ_1 et λ_2 sont donc distinctes et conjuguées, par exemple :

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \beta > 0$$

On peut montrer qu'il existe une base dans laquelle :

$$B = P^{-1}AP = \alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(tB) = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

où la matrice est une matrice de rotation d'angle β .

On a donc les trois cas suivants :

- $\alpha < 0$: le point $(0, 0)$ est un puits en spirale (voir la figure 2.2(a)) ;
- $\alpha = 0$: le point $(0, 0)$ est un centre avec des ellipses qui tournent autour (voir la figure 2.2(b)) ;
- $\alpha > 0$: le point $(0, 0)$ est une source en spirale (voir la figure 2.2(c)).

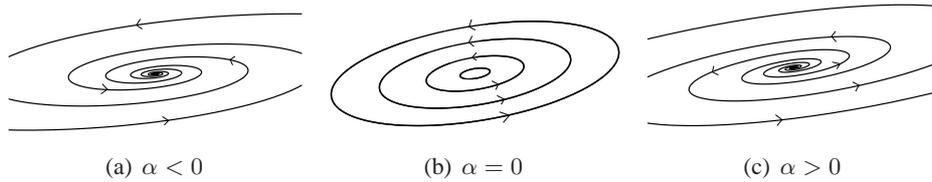


FIG. 2.2 – Valeurs propres complexes

λ_1 et λ_2 égaux

Dans ce cas λ_1 et λ_2 sont réels. Soit v_1 un vecteur propre. Il existe une base (v_1, v_2) dans laquelle on a :

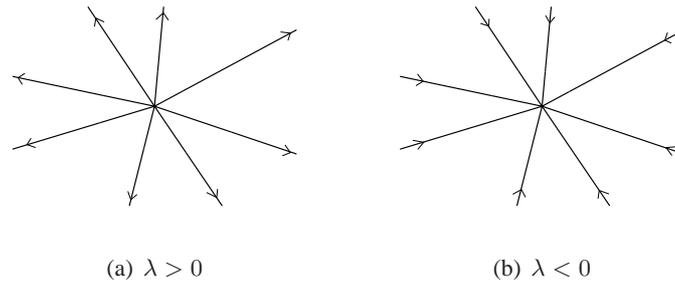
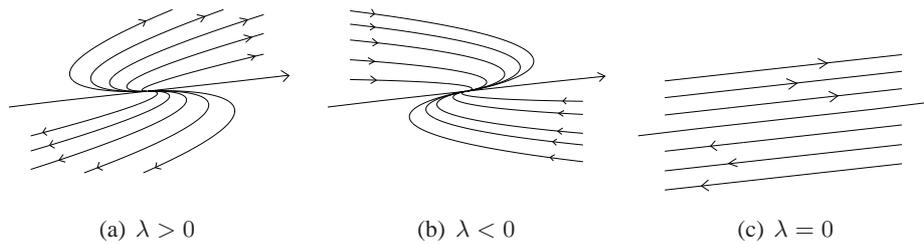
$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(tB) = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc les trois cas suivants :

- $\alpha = 0$: il existe une base de vecteurs propres et A est un multiple de l'identité si $\lambda \neq 0$.
 - si $\lambda > 0$ le point $(0, 0)$ est une source en étoile (voir la figure 2.3(a)) ;
 - si $\lambda < 0$ le point $(0, 0)$ est un puits en étoile (voir la figure 2.3(b)) ;
 - si $\lambda = 0$, il y a dégénérescence totale car la matrice A est nulle et la solution est le point $(0, 0)$.
- $\alpha \neq 0$: on a l'influence de $\exp(\lambda t)$ dans la direction du vecteur propre combinée avec un déplacement à vitesse constante α . Si $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$ on a encore respectivement une source (voir la figure 2.4(a)) ou un puits (voir la figure 2.4(b)). Si $\lambda = 0$, tous les points de la droite kv_1 sont points d'équilibre (voir la figure 2.4(c)).

FIG. 2.3 – Valeurs propres égales avec $\alpha = 0$ FIG. 2.4 – Valeurs propres égales avec $\alpha \neq 0$

λ_1 nul et λ_2 non nul

Dans ce cas λ_2 est réel et v_1 et v_2 forment une base de vecteurs propres. La solution est $y(t) = a_1 v_1 + a_2 \exp(\lambda_2 t) v_2$.

Tous les points de la droite kv_1 sont points d'équilibre. Cette droite est une source si $\lambda_2 > 0$ (voir la figure 2.5(a)) et un puits si $\lambda_2 < 0$ (voir la figure 2.5(b)).

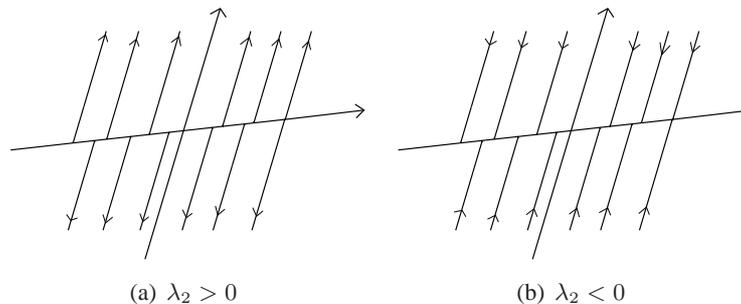


FIG. 2.5 – Une valeur propre nulle

Diagramme de bifurcation

On peut aussi réaliser le classement précédent non plus en fonction des valeurs propres mais en fonction de la trace $\text{tr}(A)$ et du déterminant $\det(A)$ de la matrice. En effet le polynôme caractéristique de la matrice A est égal à $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$. On se place ainsi dans le plan $(\text{tr}(A), \det(A))$ et selon la position d'un point dans ce plan, on retrouve tous les cas précédents. En particulier la parabole

d'équation $\det(A) = \text{tr}(A)^2/4$ détermine le lieu des points où les valeurs propres de A sont égales (voir la figure 2.6).

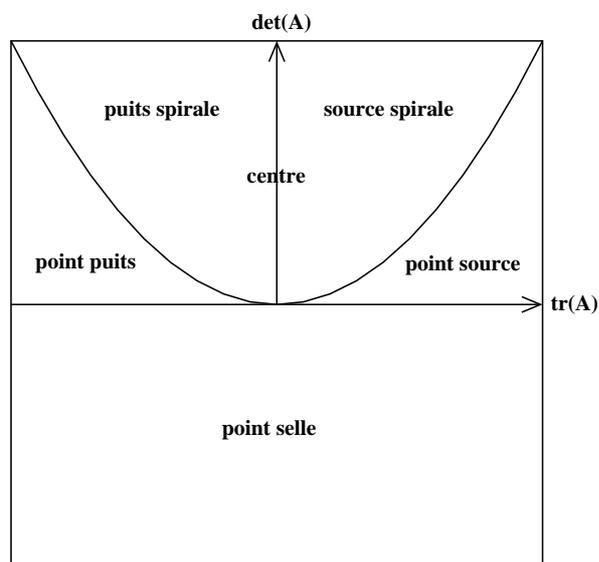


FIG. 2.6 – Diagramme de bifurcation

Récapitulation

Pour la dimension 2, on peut donc grouper les résultats précédents en quatre cas :

- valeurs propres réelles de signe opposé : point selle ;
- valeurs propres à partie réelle négative : puits ;
- valeurs propres à partie réelle positive : source ;
- valeurs propres imaginaires pures : centre.

Cela pourra en grande partie se généraliser pour la dimension n (voir ci-après).

2.4.5 Cas de la dimension n

On généralise l'étude réalisée au paragraphe précédent ; le problème est qu'ici le nombre de cas est très grand au vu du nombre de valeurs propres. On peut cependant conclure dans certains cas.

Si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement négative, alors les solutions vérifient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ et l'origine est un puits.

Si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement positive, alors les solutions vérifient : $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ et l'origine est une source.

S'il n'y a pas de valeur propre nulle, on a un point selle.

2.5 Stabilité des systèmes d'équations différentielles autonomes

On étudie ici le système explicite autonome :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

où f est une application de classe C^1 , U est un ouvert et $y_0 \in U$. On a pris $t_0 = 0$ car le système est autonome.

Comme f est de classe C^1 , il y a existence et unicité de ce problème de Cauchy.

2.5.1 Points d'équilibre, linéarisation

Un point \bar{y} est appelé *point d'équilibre* du système (2.4) si $f(\bar{y}) = 0$. $y(t) = \bar{y}$ est donc une solution du système ; pour un système physique cela peut correspondre à un point d'équilibre.

\bar{y} est aussi appelé *zéro* ou *point singulier* du champ de vecteurs f .

Lorsque t évolue, chaque point du plan de phase « bouge » le long des trajectoires qui passent par ce point : on définit ainsi le *flot* du système d'équations différentielles (2.4). De façon plus théorique, pour chaque point y de U , il existe une unique solution $\Phi(t)$ définie sur un intervalle maximal de \mathbb{R} telle que $\Phi(0) = y$. $\Phi(t)$ dépend de ce point initial y . On peut donc définir le flot $\Phi(t, y) : \Omega \subset \mathbb{R} \times U \longrightarrow U$. On le note souvent $\Phi_t(y)$. C'est la solution passant en y pour $t = 0$. On a en particulier $\Phi_t(\bar{y}) = \bar{y}$. \bar{y} est donc aussi appelé le *point stationnaire* ou le *point fixe* du flot.

f étant de classe C^1 , on note f_y la matrice Jacobienne $n \times n$ de f : son élément (i, j) est $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$.

Le développement de Taylor de f autour du point d'équilibre \bar{y} donne :

$$f(y) = f(\bar{y}) + f_y(\bar{y})(y - \bar{y}) + \|y - \bar{y}\| \varepsilon(y - \bar{y})$$

avec $\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \varepsilon(y - \bar{y}) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

En utilisant les définitions de f et \bar{y} , on obtient :

$$y' = f_y(\bar{y})(y - \bar{y}) + \|y - \bar{y}\| \varepsilon(y - \bar{y}).$$

Si l'on note $\xi = y - \bar{y}$, on peut ainsi écrire le *système linéarisé* autour de \bar{y} :

$$\begin{cases} \xi' = f_y(\bar{y}) \xi \\ \xi(0) = y_0 - \bar{y} \end{cases} \quad (2.5)$$

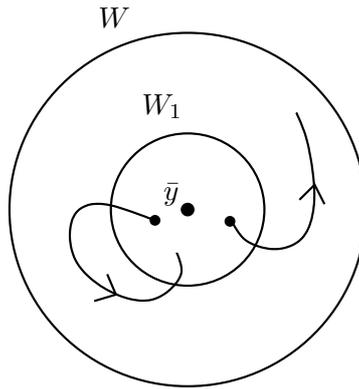
On aurait pu linéariser autour d'un autre point que \bar{y} , mais c'est la linéarisation autour de ce dernier point qui va nous servir pour la stabilité.

2.5.2 Notions de stabilité

On veut savoir ce qui se passe autour d'un point d'équilibre : c'est lié à la notion de stabilité.

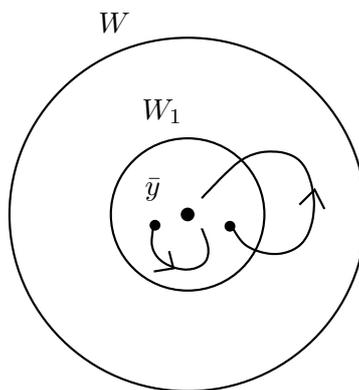
On considère toujours le système d'équations différentielles autonomes (2.4) et on a les définitions suivantes.

Définition 2.5.1 \bar{y} est un point d'équilibre stable si pour tout voisinage W de \bar{y} dans U , il existe un voisinage W_1 de \bar{y} dans W tel que toute solution $y(t)$ avec y_0 dans W_1 est définie et est dans W pour tout $t > 0$.



Définition 2.5.2 \bar{y} est un point d'équilibre asymptotiquement stable si pour tout voisinage W de \bar{y} dans U , il existe un voisinage W_1 de \bar{y} dans W tel que toute solution $y(t)$ avec y_0 dans W_1 est définie et est dans W pour tout $t > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \bar{y}$.

Un point d'équilibre asymptotiquement stable est donc un point d'équilibre stable avec en plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \bar{y}$.



Par exemple, pour un système linéaire (voir 2.4.4), un centre est un point d'équilibre stable et un puits est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

On va maintenant pouvoir relier stabilité et valeurs propres du système linéaire associé (2.5) :

- \bar{y} est un puits si les valeurs propres de $f_y(\bar{y})$ sont toutes à partie réelle strictement négative : le point est asymptotiquement stable.
- \bar{y} est une source si les valeurs propres de $f_y(\bar{y})$ sont toutes à partie réelle strictement positive : le point est instable.
- \bar{y} est un point selle si les valeurs propres de $f_y(\bar{y})$ sont en partie à partie réelle strictement négative et en partie à partie réelle strictement positive : le point est instable.

Le théorème suivant vient compléter ces propositions.

Théorème 2.5.1 Si \bar{y} est un point d'équilibre stable, alors aucune valeur propre de $f_y(\bar{y})$ n'a de partie réelle strictement positive.

Ces notions de stabilité liées à l'examen du Jacobien du système aux points d'équilibres permettent de voir le comportement des trajectoires autour de ces points et de faire ainsi des études qualitatives sans avoir à résoudre le système.

2.5.3 Fonction de Lyapunov

Pour certains cas, l'examen des valeurs propres ne suffit pas. On a besoin d'un autre outil dû au mathématicien et ingénieur russe Lyapunov (début du siècle).

L'idée est que près d'un point d'équilibre asymptotiquement stable (puits), il y a une norme $\|\cdot\|$ de \mathbb{R}^n , telle $\|y(t) - \bar{y}\|$ décroît lorsque $y(t) \rightarrow \bar{y}$. Lyapunov a montré que l'on pouvait utiliser d'autres fonctions qu'une norme.

On considère toujours le système d'équations différentielles autonomes (2.4) et on a la définition suivante.

Définition 2.5.3 On appelle fonction de Lyapunov pour le point d'équilibre \bar{y} une fonction continue V de W voisinage de U à valeurs dans \mathbb{R} , différentiable sur $W - \bar{y}$ et telle que :

- a) $V(\bar{y}) = 0$ et $V(y) > 0$ si $y \neq \bar{y}$
- b) $\frac{d}{dt}V(y(t)) \leq 0$ dans $W - \bar{y}$
- c) si de plus $\frac{d}{dt}V(y(t)) < 0$ dans $W - \bar{y}$, alors V est une fonction de Lyapunov stricte

C'est le théorème suivant qui sert à utiliser les fonctions de Lyapunov.

Théorème 2.5.2 Si le point d'équilibre \bar{y} admet une fonction de Lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable. Si le point d'équilibre \bar{y} admet une fonction de Lyapunov stricte, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Quelques remarques au sujet des fonctions de Lyapunov :

- On note souvent \dot{V} pour $\frac{d}{dt}V(y(t))$.
- On peut utiliser une fonction de Lyapunov sans résoudre le système.
- Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

2.6 Représentation graphique

On a vu au paragraphe 2.3 les notions de courbe intégrale, plan de phase et trajectoire. Lorsque le système est de petite dimension, il sera possible de tracer des représentations graphiques des solutions. On essaiera d'abord d'avoir une vision du comportement des solutions sans résoudre le système en traçant, lorsque c'est possible, le champ de vecteurs correspondant. On rappelle que lorsque le problème de Cauchy a une solution unique, les courbes intégrales ne se coupent pas et que pour un système autonome, les trajectoires ne se coupent pas dans le plan de phase.

Dans toute la suite, on se place dans le cas où les conditions du théorème de Cauchy sont satisfaites.

2.6.1 Dimension 1

On considère le système explicite :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

et l'on cherche une solution $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

Ici les courbes intégrales sont des courbes dans le plan (t, y) et elles ne se coupent pas s'il y a unicité de la solution.

On peut tracer le champ de vecteurs du plan qui détermine les pentes des solutions : on trace en chaque point d'une grille du plan (t, y) un petit segment correspondant à la pente d'une courbe intégrale en ce point, soit le vecteur défini par $\begin{pmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{pmatrix}$. Noter qu'il est inutile de résoudre le système pour réaliser ce tracé. Ensuite, on pourra tracer par dessus des courbes intégrales de y en fonction de t .

Exemple

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) - t \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

On rappelle qu'il est impossible de résoudre analytiquement cette équation différentielle, que ce soit sous la forme de fonctions élémentaires ou d'intégrales de fonctions élémentaires.

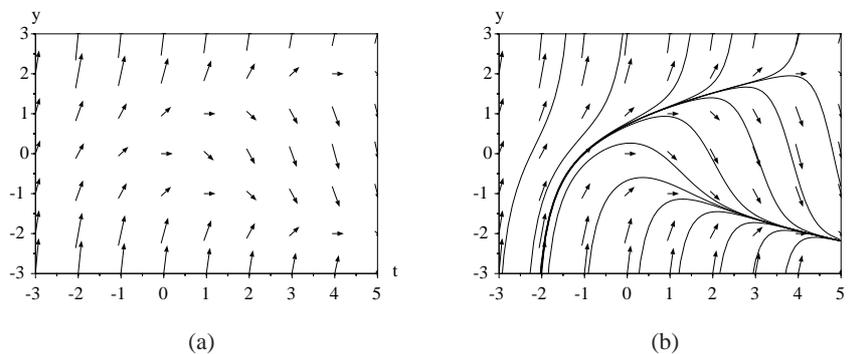


FIG. 2.7 – Lignes de champ et trajectoires pour $y' = y^2 - t$

La figure 2.7(a) donne le champ de vecteurs dans le plan et sur la figure 2.7(b) on a tracé en plus des courbes intégrales.

2.6.2 Dimension 2

En dimension 2, on change habituellement de notation pour revenir à la notation standard (x, y) . Donc on considère le système explicite autonome :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) & f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ y' = g(x, y) & g : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \quad y_0 = y(0) \end{cases}$$

et l'on cherche une solution (x, y) où x et y appartiennent à $I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

Ici les courbes intégrales sont des courbes en dimension 3 qu'il peut être difficile d'interpréter. En revanche les trajectoires dans le plan de phase sont des courbes dans le plan (x, y) et pour un système autonome avec unicité de la solution, elles ne se coupent pas. C'est la raison pour laquelle on a choisi par défaut un système autonome ; dans le cas contraire les trajectoires sont difficiles à interpréter.

On peut tracer le champ de vecteurs dans le plan de phase qui détermine le vecteur vitesse d'un point sur la trajectoire : on trace en chaque point d'une grille du plan (x, y) un petit segment correspondant à la vitesse en ce point, soit le vecteur défini par $\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$. Noter qu'il est inutile de résoudre le système pour réaliser ce tracé. Ensuite, on pourra tracer par dessus des trajectoires $x(t), y(t)$.

Exemple : le système de Lotka-Volterra

À Trieste, pendant la première guerre mondiale, la pêche avait diminué à cause des événements. La pêche consistait à lancer des filets et à récupérer tous les poissons. Le bureau des pêches avait constaté qu'alors la proportion de poissons du style requins, peu intéressants pour la consommation, avait considérablement augmenté par rapport aux poissons intéressants du style sardines. Ils demandèrent l'aide de Volterra qui modélisa le système requins-sardines par le système des deux équations différentielles suivantes où $x(t)$ représente le nombre de sardines et $y(t)$ représente le nombre de requins :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) & a, b > 0 \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) & c, d > 0 \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

Ce modèle approché, appelé aussi système de Lotka-Volterra, signifie qu'en l'absence de requins les sardines prolifèrent $x'(t) = ax(t)$, qu'en l'absence de sardines les requins disparaissent $y'(t) = -dy(t)$ et le terme en $x(t)y(t)$, qui représente la rencontre des requins et des sardines, augmente le nombre de requins et diminue le nombre de sardines (car ces dernières sont mangées par les requins).

À partir de ce modèle Volterra en déduit, sans pouvoir faire les calculs numériques à l'époque, que plus on pêche de poissons, plus la proportion de sardines, donc de poissons intéressants, est importante !

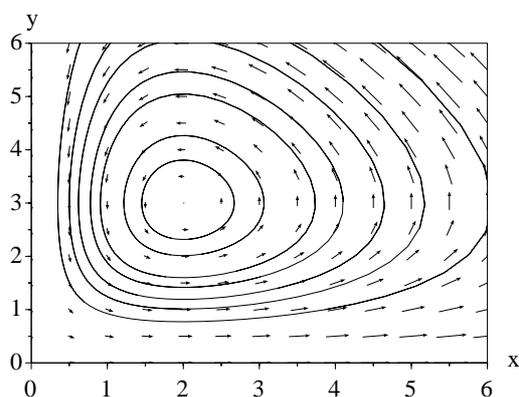


FIG. 2.8 – Lignes de champ et trajectoires pour le système de Lotka-Volterra

En prenant par exemple comme valeurs numériques $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 2$, la figure 2.8 montre le tracé dans le plan de phase (x, y) du champ de vecteurs ainsi que quelques trajectoires : on voit bien que ces dernières tournent autour du point d'équilibre $(x = d/c = 2, y = a/b = 3)$.

On peut aussi tracer une courbe intégrale qui est ici une courbe de \mathbb{R}^3 dans l'espace (x, y, t) : c'est ce que l'on voit sur la figure 2.9. On remarque que, comme le système est autonome, la trajectoire se projette en une courbe fermée sur la plan (x, y) , autrement dit, toutes les trajectoires se déduisent les unes des autres par translation en temps.

2.6.3 Dimensions supérieures

On ne pourra raisonnablement tracer que des représentations graphiques de certaines composantes de y par rapport au temps.

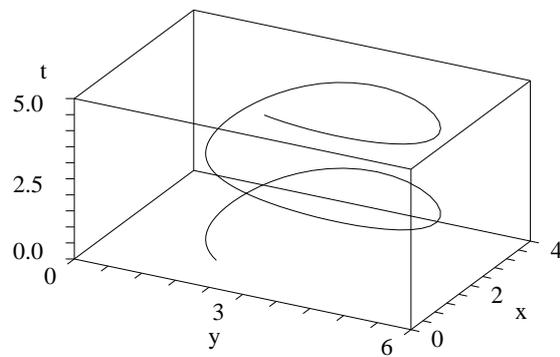


FIG. 2.9 – Une courbe intégrale pour le système de Lotka-Volterra

Chapitre 3

Systemes algebroidifférentiels

Nous avons étudié jusqu'à présent des systèmes d'équations différentielles explicites. Nous allons maintenant voir ce que l'on peut dire des systèmes d'équations différentielles implicites, en particulier des systèmes algebroidifférentiels.

3.1 Exemples de systèmes algebroidifférentiels

Tout d'abord, nous allons voir deux exemples importants où l'on peut aboutir à des systèmes algebroidifférentiels.

3.1.1 Problème de contrôle optimal

On cherche ici à commander un système d'équations différentielles. On a le système :

$$\begin{cases} y' = f(y, u) & y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où u est le contrôle à déterminer qui doit minimiser le critère :

$$J(u) = \int_0^1 \varphi(y(t), u(t)) dt$$

On peut montrer de différentes façons (calcul variationnel, principe du minimum...) qu'une solution du problème vérifie :

$$\begin{cases} y' = f(y, u) \\ v' = -f_y^T(y, u)v - \varphi_y^T(y, u) \\ 0 = f_u^T(y, u)v + \varphi_u^T(y, u) \end{cases}$$

avec $y(0) = 0$ et $v(1) = 0$, où v est l'état adjoint du système. On a à nouveau noté f_y la matrice Jacobienne $n \times n$ d'élément $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, et il en est de même pour φ_y , f_u et φ_u .

Si l'on remplace le vecteur $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ par y et si l'on introduit une nouvelle fonction f , le système précédent est un système algebroidifférentiel du type :

$$\begin{cases} y' = f(y, u) \\ 0 = g(y, u) \end{cases}$$

La seule différence ici avec les systèmes que l'on va traiter par la suite est que l'on n'a pas ici un problème aux conditions initiales mais un problème aux deux bouts à cause de la condition $v(1) = 0$.

3.1.2 Systèmes mécaniques conservatifs

Nous insisterons particulièrement sur les systèmes mécaniques qui forment une très grande classe de problèmes qui se ramènent à des systèmes algébro-différentiels.

On s'intéresse à des systèmes mécaniques soumis à des *champs de force conservatifs*, c'est-à-dire où le champ dérive d'un potentiel :

$$\vec{F}(x) = -\overrightarrow{\text{grad}} E^p(x)$$

où en général x est un point de l'espace \mathbb{R}^3 et E^p est l'énergie potentielle du système.

Alors pour un tel système l'énergie totale $E = E^c + E^p$ est constante, où E^c désigne l'énergie cinétique.

En général, tous les problèmes de pendules non amortis, les problèmes multicorps dans l'espace sont des systèmes mécaniques conservatifs.

Pour obtenir les équations d'un tel système, on a plusieurs possibilités :

- loi de Newton : on travaille sur les positions des corps ;
- équations de Lagrange : on travaille sur les positions et les vitesses des corps ;
- équations d'Hamilton : on travaille sur les positions et les moments des corps ;
- autres...

Ici nous allons utiliser les équations ou formulation de Lagrange.

Équations de Lagrange

L'idée vient de la *formule d'Euler* (1756). On a une fonction $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et on cherche y qui réalise :

$$\min_y \int_{t_0}^{t_1} F(y, y') dt$$

Une condition nécessaire pour que y réalise le minimum est :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Lagrange (1788) a appliqué cette formule au Lagrangien :

$$L = E^c - E^p = L(x, y, z, x', y', z')$$

qui est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Il a montré que la condition nécessaire du problème $\min_{x,y,z} \int_{t_0}^{t_1} L(x, y, z, x', y', z') dt$ est une équation différentielle qui décrit le mouvement du système correspondant.

L'idée est d'appliquer cette formulation pour un système de n coordonnées généralisées appelées traditionnellement $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ appartenant à \mathbb{R}^n . On obtient alors les *équations de Lagrange* pour le Lagrangien $L(q, q')$:

$$\frac{d}{dt}(L_{q'_k}) - L_{q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

où l'on a encore noté $L_{q'_k}$ et L_{q_k} les dérivées partielles du Lagrangien respectivement par rapport à q'_k et q_k .

En développant $\frac{d}{dt}(L_{q'_k})$, (3.1) devient alors le système d'équations différentielles :

$$\sum_{l=1}^n L_{q'_k q'_l} q''_l = - \sum_{l=1}^n L_{q'_k q_l} q'_l + L_{q_k} \quad k = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Mais il peut y avoir des contraintes sur les q et les q' . On ne s'intéressera ici qu'aux contraintes où la vitesse q' n'intervient pas, c'est-à-dire aux *systèmes holonomes*. La contrainte peut s'écrire : $g(q) = 0$ où g est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Ces m contraintes définissent la géométrie du système.

L'idée de Lagrange a été de changer le Lagrangien en :

$$L(q, q') = E^c(q, q') - E^p(q) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(q) \quad (3.3)$$

où les λ_i sont les *multiplicateurs de Lagrange* associés aux contraintes. Il est à noter que l'énergie potentielle E^p ne dépend pas des vitesses q' .

Les équations de Lagrange deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(L_{q'_k}) - L_{q_k} = 0 & k = 1, \dots, n \\ 0 = g(q) \end{cases} \quad (3.4)$$

À partir de (3.4), on obtient à nouveau le système d'équations différentielles (3.2) que l'on écrit maintenant en notation matricielle :

$$L_{q'q'} q'' = -L_{q'q} q' + L_q$$

où $L_{q'q'}$ et $L_{q'q}$ sont des matrices $n \times n$ d'élément (i, j) respectivement $\frac{\partial^2 L}{\partial q'_i \partial q'_j}$ et $\frac{\partial^2 L}{\partial q'_i \partial q_j}$.

En remplaçant le Lagrangien par sa définition (3.3) et en tenant compte du fait que l'énergie potentielle ne dépend pas de la vitesse, on obtient :

$$E_{q'q'}^c q'' = -E_{q'q}^c q' + E_q^c - E_q^p - g_q^T \lambda$$

où λ est le vecteur des multiplicateurs et g_q est une matrice $m \times n$.

Finalement, si l'on veut un système d'ordre 1, on introduit la variable u et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} q' = u \\ E_{uu}^c u' = -E_{uq}^c u + E_q^c - E_q^p - g_q^T \lambda \\ 0 = g(q) \end{cases}$$

où $E_{uu}^c = M(q)$ est une matrice symétrique définie positive.

On écrit en général ce système sous la forme :

$$\begin{cases} q' = u \\ M(q)u' = \varphi(q, u) - g_q^T(q)\lambda \\ 0 = g(q) \end{cases} \quad (3.5)$$

qui est un système algébro-différentiel en $(q, u, \lambda)^T$.

Remarque : il est possible d'utiliser la formulation de Lagrange pour les systèmes non holonomes et de prendre en compte facilement certains types de frottements visqueux (proportionnels à la vitesse). Pour des systèmes non conservatifs plus généraux, il faut utiliser le théorème (ou principe) des travaux virtuels.

3.2 Indice d'un système algébro-différentiel

En fait, la forme la plus générale d'un système algébro-différentiel est celle du système implicite :

$$\begin{cases} f(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad f : U \subset I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

où U est un ouvert, I est un intervalle de \mathbb{R} , $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ et où l'on ne peut pas exprimer explicitement sous forme analytique y' en fonction de y et de t .

On ne peut pas dire grand chose sur des systèmes aussi généraux. Le théorème des fonctions implicites dit que s'il existe (t_0, y_0, y'_0) tels que $f(t_0, y_0, y'_0) = 0$ et si $f_{y'}(t_0, y_0, y'_0)$ est inversible, alors il existe une application unique F de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage de (t_0, y_0, y'_0) telle que $y' = F(t, y)$. Mais cela ne donne pas l'expression de F . De plus, bien souvent pour les systèmes algébro-différentiel que l'on envisage, $f_{y'}(t_0, y_0, y'_0)$ n'est pas inversible.

En pratique, on aura souvent des systèmes semi-explicites du type :

$$\begin{cases} y' = f(t, y, z) \\ 0 = g(t, y, z) \end{cases}$$

comme on l'a vu dans le paragraphe 3.1.

Une question est donc : « peut-on passer d'un système implicite ou semi-explicite à un système explicite ? ». Cela va nous permettre de classer les systèmes.

3.2.1 Exemples d'indices d'un système algébro-différentiel

Nous allons traiter trois exemples classiques de types de systèmes algébro-différentiels et voir comment on peut les « réduire ».

Exemple 1

On considère le système :

$$\begin{cases} y' = f(y, z) & f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ 0 = g(y, z) & g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (3.6)$$

où $g(y, z)$ et z ont mêmes dimensions.

Pour le problème de Cauchy correspondant il faut avoir des *conditions initiales compatibles* : $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ et $g(y_0, z_0) = 0$ (le système étant autonome, on a pris $t_0 = 0$).

Noter qu'ici le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas. En effet si l'on note $Y = (y, z)^T$, on a :

$$F(Y, Y') = \begin{pmatrix} y' - f(y, z) \\ -g(y, z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{Y'} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $F_{Y'}$ n'est pas inversible.

Le problème du système (3.6) est que z' n'apparaît pas explicitement. Pour le faire apparaître, on différentie les contraintes $g(y, z)$ par rapport au temps :

$$0 = g_y(y, z)y' + g_z(y, z)z' = g_y(y, z)f(y, z) + g_z(y, z)z'$$

où g_y est une matrice $m \times n$ et g_z est une matrice $m \times m$.

Si dans un voisinage de la solution g_z est inversible, alors le système algébro-différentiel (3.6) peut s'écrire sous la forme explicite :

$$\begin{cases} y' = f(y, z) \\ z' = -g_z^{-1}(y, z)g_y(y, z)f(y, z) \end{cases}$$

En conclusion, on a différentié une fois le système algébro-différentiel (3.6) pour obtenir un système explicite : on dit que le système algébro-différentiel est d'indice 1.

Exemple 2

On considère le système :

$$\begin{cases} y' = f(y, z) & f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ 0 = g(y) & g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (3.7)$$

où $g(y)$ et z ont mêmes dimensions.

Pour le problème de Cauchy correspondant il faut avoir encore des conditions initiales compatibles : $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ et $g(y_0) = 0$ (le système étant autonome, on a pris $t_0 = 0$).

Noter que le théorème des fonctions implicites ne s'applique toujours pas.

On va différentier les contraintes une fois, ce qui nous ramène au système :

$$\begin{cases} y' = f(y, z) \\ 0 = g_y(y)f(y, z) \end{cases} \quad (3.8)$$

qui du type du système algébro-différentiel (3.6) de l'exemple précédent. On réalise donc à nouveau la différentiation de la nouvelle contrainte et l'on obtient :

$$0 = g_{yy}(y)(f, f) + g_y(y)f_y(y, z)f(y, z) + g_y(y)f_z(y, z)z'$$

où $g_{yy}(y)(f, f)$ est un vecteur de dimension m dont l'élément i est le scalaire $f^T g_{iyy} f$ où g_{iyy} est la matrice Hessienne de g_i , c'est-à-dire la matrice $n \times n$ d'élément (i, j) égal à $\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_i \partial y_j}$.

De même que dans l'exemple 1, si dans un voisinage de la solution la matrice $m \times m$ $g_y f_z$ est inversible, alors le système algébro-différentiel (3.8) peut s'écrire sous la forme explicite :

$$\begin{cases} y' = f(y, z) \\ z' = -[g_y(y)f_z(y, z)]^{-1} [g_{yy}(y)(f, f) + g_y(y)f_y(y, z)f(y, z)] \end{cases}$$

Pour le problème de Cauchy correspondant, il faut avoir maintenant des *conditions initiales constantes* c'est-à-dire compatibles avec toutes les contraintes, initiales et introduites en cours de calcul : $g(y_0) = 0$ et aussi $g_y(y_0)f(y_0, z_0) = 0$.

En conclusion, on a différentié deux fois le système algébro-différentiel (3.7) pour obtenir un système explicite : on dit que le système algébro-différentiel est d'indice 2.

Exemple 3

On considère le système :

$$\begin{cases} y' = f(y, z) & f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ z' = k(y, z, u) & k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ 0 = g(y) & g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3.9)$$

où $g(y)$ et u ont mêmes dimensions et avec toujours les conditions initiales compatibles pour le problème de Cauchy correspondant : $y(0) = y_0, z(0) = z_0, u(0) = u_0$ et $g(y_0) = 0$.

On va maintenant différentier les contraintes deux fois :

$$\begin{aligned} 1 \text{ fois : } & 0 = g_y(y)f(y, z) \\ 2 \text{ fois : } & 0 = g_{yy}(y)(f, f) + g_y(y)f_y(y, z)f(y, z) + g_y(y)f_z(y, z)k(y, z, u) \end{aligned}$$

La deuxième contrainte différentiée est du type $0 = G(y, z, u)$ et l'on obtient ainsi un système du type de celui de l'exemple 1 (3.6) qui est d'indice 1 où y joue le rôle de $(y, z)^T$ et z joue le rôle de u .

On applique la méthode de l'exemple 1 et on différentie encore une fois les contraintes $G(y, z, u)$ pour obtenir explicitement u' , et si la matrice $p \times p$ $g_y(y)f_z(y, z)k_u(y, z, u)$ est inversible dans un voisinage de la solution, on obtient alors un système explicite.

Les conditions initiales consistantes doivent ici vérifier

$$\begin{aligned} g(y_0) = 0, \quad g_y(y_0)f(y_0, z_0) = 0 \text{ et aussi} \\ g_{yy}(y_0)(f, f) + g_y(y_0)f_y(y_0, z_0)f(y_0, z_0) + g_y(y_0)f_z(y_0, z_0)k(y_0, z_0, u_0) = 0. \end{aligned}$$

En conclusion, on a différentié trois fois le système algébro-différentiel (3.9) pour obtenir un système explicite : on dit que le système algébro-différentiel est d'indice 3.

3.2.2 Indice de différentiation d'un système algébro-différentiel

Les exemples du paragraphe précédent sont en accord avec la définition suivante.

Définition 3.2.1 *Le système $f(t, y, y') = 0$ a un indice de différentiation égal à m si m est le nombre minimal de différentiations analytiques :*

$$\left| \begin{array}{l} f(t, y, y') = 0 \\ \frac{d}{dt}(f(t, y, y')) = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^m}{dt^m}(f(t, y, y')) = 0 \end{array} \right.$$

qu'il faut réaliser de façon que l'on puisse extraire du système précédent un système explicite $u' = \varphi(u)$ (parfois appelé l'équation différentielle sous-jacente).

Il existe aussi un autre concept d'indice d'un système algébro-différentiel, l'indice de perturbation qui correspond à une mesure de la sensibilité des solutions par rapport aux perturbations du système. L'indice de différentiation et l'indice de perturbation ne sont pas toujours égaux.

L'indice de différentiation mesure aussi d'une certaine façon la difficulté qu'il y a à résoudre le système. En effet la différentiation est une opération qui introduit des instabilités numériques, donc plus on réalisera de différentiations, c'est-à-dire plus l'indice de différentiation sera élevé et plus le système sera numériquement difficile à résoudre.

Les solveurs de systèmes d'équations différentielles implicites et/ou de systèmes algébro-différentiels ne savent en général résoudre que les systèmes d'indice 1 et quelques systèmes d'indice 2. Lorsque l'on a des systèmes d'indice plus élevé, comme dans l'exemple 3 du paragraphe précédent ou pour les systèmes mécaniques comme on le verra plus loin, il faudra réduire l'indice. L'inconvénient majeur est que les contraintes ont été changées et la résolution introduit une instabilité qui fait que les contraintes initiales, malgré des conditions initiales consistantes, ne sont pas toujours bien vérifiées. Une méthode pour résoudre ce problème est celui de la *stabilisation des contraintes*. Par exemple, comme dans le cas des systèmes (3.7) ou (3.9) où l'on différentie deux fois une contrainte du type $g(y)$, on remplacera $0 = g''(y)$ par le polynôme

$$0 = g''(y) + 2\alpha g'(y) + \beta^2 g(y)$$

en choisissant les paramètres α et β de façon que cette équation différentielle soit asymptotiquement stable, par exemple $\alpha = \beta > 0$. Le choix de bonnes valeurs de α et β peut s'avérer difficile.

3.2.3 Réduction d'indice pour un système mécanique

On reprend la formulation (3.5) obtenue à partir des équations de Lagrange d'un système mécanique conservatif avec contraintes :

$$\begin{cases} q' = u & q, u \in \mathbb{R}^n \\ M(q)u' = \varphi(q, u) - g_q^T(q)\lambda & \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m \\ 0 = g(q) & g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{cases}$$

où $M(q)$ est une matrice $n \times n$ symétrique définie positive. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} q' = u \\ u' = M(q)^{-1}\varphi(q, u) - M(q)^{-1}g_q^T(q)\lambda \\ 0 = g(q) \end{cases}$$

qui est d'indice 3 car du type du système (3.9) où y joue le rôle de q , z joue le rôle de u et u joue le rôle de λ . On peut donc obtenir un système d'indice 2, 1 ou explicite selon que l'on va différentier la contrainte une, deux ou trois fois.

Pour obtenir un système explicite après avoir différentié les contraintes deux fois la condition qui était pour (3.9) que $g_y(y)f_z(y, z)k_u(y, z, u)$ soit inversible devient ici : $g_q(q)M(q)^{-1}g_q^T(q)$ inversible. Ceci est vérifié si les lignes de $g_q(q)$ sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire si les contraintes sont indépendantes, ce qui est généralement vérifié.

3.3 Systèmes algébro-différentiels linéaires à coefficients constants

On a vu qu'il était difficile de dire quelque chose sur les systèmes algébro-différentiels généraux si ce n'est la réduction d'indices. En revanche on a quelques résultats dans le cas linéaire à coefficients constants.

On considère le système algébro-différentiel :

$$Ay' + By = f(t) \tag{3.10}$$

où A et B sont des matrices constantes carrées $n \times n$ à éléments dans \mathbb{R}^n .

L'idée est de rechercher des solutions sous la forme $\exp(\lambda t)y_0$ pour le système sans le second membre, ce qui fait apparaître le *faisceau de matrices* $\lambda A + B$. C'est l'étude de ces faisceaux de matrices qui va nous donner quelques résultats sur les solutions du système.

Définition 3.3.1 Un faisceau de matrices $\lambda A + B$ est régulier s'il existe λ dans \mathbb{C} tel que $\lambda A + B$ soit inversible, c'est-à-dire si le polynôme $\det(\lambda A + B)$ n'est pas identiquement nul.

On peut comparer $\det(\lambda A + B)$ qui selon la matrice A est un polynôme qui peut être de degré quelconque inférieur ou égal à n avec le polynôme caractéristique $\det(\lambda I + B)$ où la matrice A est l'identité et qui est toujours de degré n .

Pour résoudre le système (3.10), on va utiliser le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 Si $\lambda A + B$ est un faisceau de matrices régulier, il existe des matrices inversibles P et Q telles que :

$$PAQ = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } PBQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

où N est une matrice nilpotente d'indice m .

Alors si l'on utilise les transformations $y = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $Pf(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, le système (3.10) devient :

$$\begin{cases} y_1' + Cy_1 = f_1(t) \\ Ny_2' + y_2 = f_2(t) \end{cases}$$

Le système en y_1 est un système d'équations différentielles linéaires explicite et le système en y_2 se résout facilement. En effet, en notant D l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , on a $(ND + I)y_2 = f_2(t)$, soit :

$$y_2 = (ND + I)^{-1} f_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i N^i \frac{d^i f_2(t)}{dt^i}$$

mais N est nilpotente d'indice m , donc finalement :

$$y_2 = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i N^i \frac{d^i f_2(t)}{dt^i}$$

Plus on dérive numériquement, plus on introduit d'imprécision et d'instabilité, et donc m mesure la difficulté numérique à résoudre le système. m est appelé l'indice de nilpotence du faisceau de matrices $\lambda A + B$. On peut montrer qu'il est égal à l'indice de différentiation d'un système algébro-différentiel défini au paragraphe 3.2.2.

Lorsque le système algébro-différentiel est linéaire mais variable avec le temps $A(t)y' + B(t)y = f(t)$, on peut faire le même type de raisonnement que pour le cas avec des coefficients constants, mais c'est beaucoup plus difficile car le faisceau de matrices dépend du temps.

Chapitre 4

Résolution numérique

Pour la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles, nous allons utiliser et décrire succinctement les solveurs qui existent dans le logiciel de calcul scientifique Scilab. Cependant les options utilisées dans ces solveurs sont en général disponibles dans les autres solveurs des autres systèmes.

4.1 Solveur de systèmes d'équations différentielles explicites

Le solveur de systèmes d'équations différentielles explicites de Scilab est la fonction **ode**. C'est en fait une interface pour le package ODEPACK écrit en fortran qui contient lui-même différents solveurs (lsoda, lsode...). Il résout le système :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Une des difficultés auxquelles ces solveurs sont confrontés est la résolution des *problèmes raides*. La définition d'un tel problème n'est pas très rigoureuse. On peut dire qu'un problème raide est un problème pour lequel les méthodes explicites ne fonctionnent pas : la solution est par endroit régulière et possède par endroit de grands transitoires.

ode utilise deux méthodes principales :

- pour les problèmes non raides : méthode d'Adams ;
- pour les problèmes raides : méthode BDF (Backward Differentiation Formula).

Par défaut, **ode** choisit lui-même la méthode selon que le problème est raide ou non raide, mais on peut aussi indiquer la méthode utilisée par le premier argument.

L'appel le plus simple de **ode** est :

y=ode(y0,t0,t,f)

où **y0** est le vecteur des conditions initiales y_0 (en général un vecteur colonne de dimension n), **t0** est le temps initial t_0 , **t** est le vecteur des instants où la solution va être calculée (*le premier de ces instants doit être t_0*) et **f** décrit la fonction $f(t, y)$ sous la forme **yprim=f(t,y)**. La sortie **y** de **ode** est une matrice $n \times T$ où T est la taille de t et où chaque colonne j de **y** est la valeur de y au temps t_j .

Deux paramètres importants influent sur la précision de la résolution, ce sont la *tolérance relative* **rtol** et la *tolérance absolue* **atol**. Le solveur estime à chaque instant l'erreur locale sur la solution **y(i)** et elle ne doit pas dépasser **rtol(i) |y(i) | +atol(i)**, c'est-à-dire que le test d'erreur locale est satisfait si pour chaque composante de la solution, ou bien l'erreur relative est inférieure à **rtol(i)**, ou bien l'erreur absolue est inférieure à **atol(i)**. Ces valeurs sont données comme arguments de **ode** :

```
y=ode(y0,t0,t,rtol,atol,f)
```

Ce sont des scalaires ou des vecteurs de dimension n . Si ce sont des scalaires, **rtol(i)** et/ou **atol(i)** sont tous égaux à cette valeur.

Les valeurs par défaut de **rtol** et **atol** sont respectivement 10^{-7} et 10^{-9} .

On peut aussi utiliser **ode** pour résoudre les problèmes de temps d'arrêt : on résout le système d'équations différentielles jusqu'à ce que la solution y atteigne ou traverse au moins une des surfaces d'un ensemble de n_g surfaces $g_1(t, y) = 0, \dots, g_{n_g}(t, y) = 0$. Pour cela, l'appel de **ode** devient :

```
[y,nd]=ode("root",y0,t0,t,f,ng,g)
```

où **ng** est le nombre de surfaces et **g** est une fonction **z=g(t,y)** qui retourne un vecteur dont chaque composante correspond à une surface. En retour de **ode**, **y** est toujours la solution et **nd** est un vecteur dont le premier élément est le temps d'arrêt et le deuxième élément est le numéro de la surface atteinte.

Un grand nombre d'autres réglages sont possibles. Il est possible de fournir le Jacobien du système lorsqu'on le connaît, ce qui permet d'améliorer la résolution des problèmes raides. Enfin, la définition du système (et son Jacobien éventuel) peuvent être donnés sous la forme de code C ou fortran qui est lié incrémentalement à Scilab.

4.2 Solveur de systèmes algébro-différentiels

Le solveur de systèmes algébro-différentiels de Scilab s'appelle DASSL et permet de résoudre les systèmes d'indice 1 et certains systèmes d'indice 2. Lorsque l'indice est élevé, il faudra donc en général le réduire tout en ayant à l'esprit que cela peut entraîner des problèmes de stabilité (voir la fin du paragraphe 3.2.2) et de satisfaction des contraintes ; de plus les inconnues qui interviennent peuvent perdre leur signification physique.

DASSL s'utilise de façon similaire à **ode** et s'appelle **dassl**. Il résout le système écrit sous la forme du système implicite :

$$\begin{cases} f(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

et l'appel le plus simple de la fonction **dassl** correspondant est :

```
y=dassl([y0,yprim0],t0,t,f)
```

où **y0** est le vecteur *colonne* des conditions initiales y_0 , **yprim0** est le vecteur *colonne* des conditions initiales de la dérivée y'_0 , **t0** est le temps initial t_0 , **t** est le vecteur des instants où la solution va être calculée (*le premier de ces instants doit être t_0*) et **f** décrit la fonction $f(t, y, y')$ sous la forme **[res,ires]=f(t,y,yprim)** où **yprim** correspond à y' . **res** est la valeur de $f(t, y, y')$ et **ires** est un indicateur de retour qui indique comment s'est passé le calcul de $f(t, y, y')$ et que l'on positionne à 0 lorsque tout s'est bien passé. La sortie **y** de **dassl** est une matrice $(2n + 1) \times T$ où T est la taille de **t**. La première ligne de **y** est le vecteur des instants, les lignes 2 à $n + 1$ sont les vecteurs des valeurs des y_i aux temps t_j et les lignes $n + 2$ à $2n + 1$ sont les vecteurs des valeurs des y'_i aux temps t_j .

Bien que la donnée de $y'(t_0)$ ne soit pas théoriquement nécessaire pour le problème de Cauchy, elle est utile ici pour la bonne marche de l'algorithme. Il faut donc que les conditions initiales soient compatibles, c'est-à-dire : $f(t, y_0, y'_0) = 0$. Si l'on ne connaît pas a priori la valeur de $y'(t_0)$, on peut ne pas la donner et **dassl** en calculera une valeur approchée, ou bien on peut utiliser le solveur de

systèmes d'équations **fsolve** pour la trouver en résolvant $f(t, y_0, y'_0) = 0$. Ce problème de trouver des conditions initiales consistantes est important et parfois difficile.

De la même façon que pour **ode** dans le paragraphe précédent, on peut donner des tolérances relatives et absolues à **dassl**. Toutes les possibilités de réglage du solveur existent aussi.

Pour résoudre les problèmes avec temps d'arrêt, il faudra utiliser le solveur DASRT qui correspond à la fonction **dasrt**.

Bibliographie

Le livre suivant décrit de façon très pratique l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles :

J. Hubbard, B. West

traduit de l'anglais et adapté par V. Gautheron

Équations différentielles et systèmes dynamiques, 2000

Cassini

Le livre suivant est un classique pour la théorie des systèmes d'équations différentielles et en particulier pour les problèmes de stabilité :

M.W. Hirsch, S. Smale

Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, 1974

Academic Press

Les deux livres suivants décrivent principalement toutes les méthodes numériques, sans oublier la théorie, pour résoudre les systèmes d'équations différentielles, le tome 2 traitant plus particulièrement des problèmes raides et des systèmes algébro-différentiels :

E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner

Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems, 1993

Springer Verlag

E. Hairer, G. Wanner

Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential-Algebraic Problems, 1996

Springer Verlag

Le livre suivant, après une introduction à Scilab, décrit comment faire de la simulation de systèmes à la fois avec Scilab et Scicos :

S. Campbell, J.P. Chancelier, R. Nikoukhah

Modeling and Simulation in Scilab/Scicos, 2006

Springer Verlag

Et, bien entendu, on peut aussi consulter le site Web de Scilab www.scilab.org où l'on trouvera toutes les informations utiles sur Scilab aussi bien pour les téléchargements que pour la documentation.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Évolution d'une quantité proportionnelle à elle-même	3
1.2	Cinétique chimique	4
1.3	Mécanique classique	5
2	Équations différentielles	7
2.1	Introduction	7
2.2	Classification	8
2.3	Problème de Cauchy	9
2.4	Systèmes d'équations différentielles linéaires	10
2.4.1	Quelques propriétés des solutions	11
2.4.2	Réduction des matrices	11
2.4.3	Comportement asymptotique de $\exp(tA)$	11
2.4.4	Cas de la dimension 2	12
2.4.5	Cas de la dimension n	15
2.5	Stabilité des systèmes d'équations différentielles autonomes	16
2.5.1	Points d'équilibre, linéarisation	16
2.5.2	Notions de stabilité	16
2.5.3	Fonction de Lyapunov	18
2.6	Représentation graphique	18
2.6.1	Dimension 1	18
2.6.2	Dimension 2	19
2.6.3	Dimensions supérieures	20
3	Systèmes algébro-différentiels	23
3.1	Exemples de systèmes algébro-différentiels	23
3.1.1	Problème de contrôle optimal	23
3.1.2	Systèmes mécaniques conservatifs	24
3.2	Indice d'un système algébro-différentiel	26
3.2.1	Exemples d'indices d'un système algébro-différentiel	26
3.2.2	Indice de différentiation d'un système algébro-différentiel	28
3.2.3	Réduction d'indice pour un système mécanique	29
3.3	Systèmes algébro-différentiels linéaires à coefficients constants	29
4	Résolution numérique	31
4.1	Solveur de systèmes d'équations différentielles explicites	31
4.2	Solveur de systèmes algébro-différentiels	32